CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^3 + m^2 + m^3 - m^4 - m^3 - m = -m(m^3 - m^2 - m + 1)$$

Calculamos, por Ruffini, as raíces de $m^3 - m^2 - m + 1 = 0$

	1	-1	-1	1
1)		1	0	-1
	1	0	-1	0

$$m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Polo tanto

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \ \ 0 \\ m = -1 \\ m = 1 \ (raíz\ doble) \end{cases}$$

$\boxed{m = 0}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \Rightarrow rang(A) = 2$$

$\boxed{m = -1}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \Rightarrow rang(A) = 2$$

$\boxed{m = 1} \Rightarrow rang(A) = 1$ (as tres filas son iguais e hai un elemento non nulo)

Resumindo:

$$\boxed{Rang(A) = 3, \quad se\ \ m \neq -1, 0, 1}$$
$$\boxed{Rang(A) = 2, \quad se\ \ m = \ 0\ ou\ m = -1}$$
$$\boxed{Rang(A) = 1, \quad se\ \ m = \ 1}$$

b) $\boxed{m = 1}$ Neste caso o sistema é equivalente a

$$x + y + z = 1$$

Como rango(matriz coeficientes) =rango(matriz ampliada) =1<nº de incógnitas, é un sistema compatible indeterminado. As infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \qquad \lambda \\ z = \qquad\quad \mu \end{cases} ; \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a)

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (-2,-2,-2)\\ \overrightarrow{AC} = (-2,-1,1)\end{array}\right\}$$ Non son colineais e polo tanto os puntos $A, B\ e\ C$ determinan un plano.

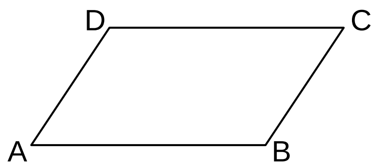
Ecuación do plano α que pasa polos puntos $A, B\ e\ C$:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-3 & y & z-2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \alpha: 2x - 3y + z - 8 = 0$$

Para que o punto D esté no plano α, deberá satisfacer a súa ecuación:

$$2\lambda - 3\lambda + 6 - \lambda - 8 = 0, \text{ e polo tanto } \boxed{\lambda = -1}$$

Como un paralelogramo é unha figura plana, bastará comprobar se para $\lambda = -1$ resulta un paralelogramo



$$\lambda = -1 \Rightarrow D(-1,-3,1) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2,-2,-2) \\ \overrightarrow{DC} = (2,2,2) \\ \overrightarrow{AD} = (-4,-3,-1) \\ \overrightarrow{BC} = (0,1,3) \end{cases}$$

Non son paralelos

$\Downarrow$

non constitúen un paralelogramo

b) Os vectores $\vec{v} = (-1,0,1)$ e $\vec{w} = (0,1,-1)$ son vectores non colineais e perpendiculares ao vector $\overrightarrow{AB} = (-2,-2,-2)$. Polo tanto, o punto $C(1,-1,3)$ e os vectores $\vec{v} = (-1,0,1)$ e $\vec{w} = (0,1,-1)$ determinan o plano π e podemos escribir as súas ecuacións paramétricas como

$$\boxed{\pi: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 + \mu \\ z = 3 + \lambda - \mu \end{cases}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) *Teorema de Bolzano*: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$ e $f(a)$ e $f(b)$ teñen distinto signo, é dicir $f(a)\cdot f(b)$<0, entón existe algún $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

- $f(x)=x^3+2x-4$ é continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica e polo tanto continua en $[1,2]$
- $f(1)=-1<0$
- $f(2)=8>0$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\exists c\in(1,2)\text{ tal que } f(c)=0}$

Teorema de Bolzano

Como $f(x)$ é continua e derivable en $\mathbb{R}$, pois é unha función polinómica, tamén o será en calquera intervalo de $\mathbb{R}$ e si existisen c_1 e c_2 tales que $f(c_1)=f(c_2)=0$, entón aplicando o teorema de Rolle, existiría un t tal que $f'(t)=0$, pero $f'(x)=3x^2+2$ non se anula en ningún punto de $\mathbb{R}$. Así pois,

$$\boxed{f(x)\ corta\ ao\ eixe\ OX\ soamente\ nun\ punto}$$

b) É unha indeterminación do tipo 1^∞. Tomamos logaritmos neperianos:

$$ln\lim_{x\to0}\left(\frac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{1/x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}ln\left(\frac{x+2}{x^2+x+2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+2)-\ln(x^2+x+2)}{x^2}$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)(aplicamos\ a\ regra\ de\ L'H\hat{o}pital)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{2x+1}{x^2+x+2}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x+2-2x^2-5x-2}{2x(x+2)(x^2+x+2)}=\lim_{x\to0}\frac{x(-x-4)}{2x(x+2)(x^2+x+2)}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{x+4}{2(x+2)(x^2+x+2)}=-\frac{1}{2}$$

e polo tanto:

$$\boxed{\lim_{x\to0}\left(\frac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{1/x^2}=e^{-1/2}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

$y = 3x - x^2$

$$\left.\begin{array}{l} y' = 3 - 2x \\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 3/2 \\ y'' = -2 < 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \text{ máximo: } (3/2, 9/4) = \text{ vértice da parábola} \\ \Longrightarrow \text{ cóncava} \end{array}$$

$3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Longrightarrow$ Puntos de corte da parábola cos eixes: (0,0), (3,0)

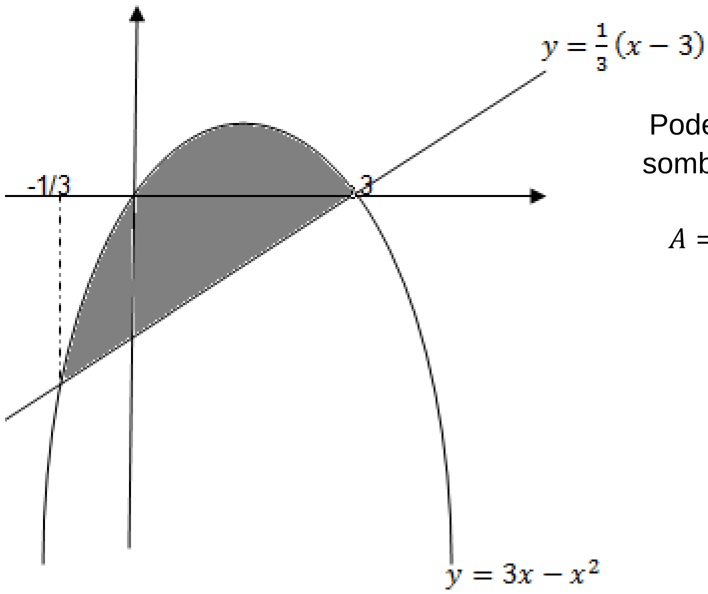
$y'(3) = -3 \Longrightarrow$ pendente da recta normal á parábola no punto (3,0): $1/3$

Ecuación da recta normal á parábola no punto (3,0):

$$y = \frac{1}{3}(x-3) \Leftrightarrow x - 3y - 3 = 0$$

Puntos de corte da recta normal e a parábola:

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x - x^2 \\ y = \frac{1}{3}(x-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3}(x-3) = 3x - x^2 \Rightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (-1/3, -10/9) \\ (3,0) \end{array}\right.$$



Podemos calcular a área pedida, rexión sombreada, mediante a integral definida:

$$A = \int_{-\frac{1}{3}}^{3} \left[3x - x^2 - \frac{1}{3}(x-3)\right] dx =$$

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{3} \left[\frac{8}{3}x - x^2 + 1\right] dx =$$

$$\left[\frac{8}{6}x^2 - \frac{x^3}{3} + x\right]_{-\frac{1}{3}}^{3} =$$

$$12 - 9 + 3 - \frac{12}{81} - \frac{1}{81} + \frac{27}{81} =$$

$$= \boxed{\frac{500}{81} u^2}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio1:

a) Matriz de coeficientes $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$; Matriz ampliada $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \\ \alpha & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 3 - 4\alpha + 9\alpha - 2 + 2 = 5\alpha$$

Polo tanto:

- Se $\alpha \neq 0, rang(C) = 3$
- Se $\alpha = 0$, $rang(C) = 2$

Como sempre $rang(A) \geq rang(C)$ e o sistema será compatible indeterminado cando $rang(C) = rang(A) = 2$, calculamos $rang(A)$ cando $\alpha = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -27 + 5 + 4 + 18 = 0 \Rightarrow rang(A) = 2, se\ \alpha = 0$$

Polo tanto, o sistema é compatible indeterminado cando $\boxed{\alpha = 0}$.

Cando $\alpha = 0$, un sistema equivalente é:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = \ \ 5 - 3z \\ x - 3y = -4 - 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \ y = 9 - z \ \Rightarrow \ x = 23 - 5z$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{cases} x = 23 - 5\lambda \\ y = \ 9 - \ \ \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \qquad \lambda \end{cases}}$$

b) Do apartado anterior deducimos que

- $\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad rang(C) = rang(A) = 2 < nº\ incógnitas$. Sistema compatible indeterminado, infinitas solucións.
- $\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rang(C) = rang(A) = 3 = nº\ incógnitas$. Sistema compatible determinado, solución única.

Polo tanto, $\boxed{o\ sistema\ sempre\ ten\ solución}$.

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio2:

a) Utilizando as propiedades do producto escalar de dous vectores, temos:

$$\begin{aligned}|\vec{v}+\vec{w}|^2 &= <\vec{v}+\vec{w}, \vec{v}+\vec{w}> \;=\; <\vec{v},\vec{v}> + <\vec{w},\vec{w}> + 2<\vec{v},\vec{w}> \\ &= |\vec{v}|^2+|\vec{w}|^2+2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\measuredangle(\vec{v},\vec{w})\end{aligned}$$

é dicir:

$$196 = 36+100+120\cdot\cos\measuredangle(\vec{v},\vec{w})$$

e polo tanto

$$\cos\measuredangle(\vec{v},\vec{w}) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{\measuredangle(\vec{v},\vec{w}) = \frac{\pi}{3}}$$

b) Calculamos o vector director, $\vec{v}_r$, da recta r

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 3 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -3\end{vmatrix} = -6\vec{\imath}+9\vec{\jmath}+6\vec{k}$$

O plano queda determinado polos elementos:

- O punto $A(-1,5,0)$
- Os vectores $\vec{v}_r=(-6,9,6)$ e $\overrightarrow{AB}=(1,-4,1)$ que son paralelos ao plano e independentes entre si. (En lugar do vector $(-6,9,6)$ podemos considerar o $(-2,3,2)$ xa que $(-6,9,6)||(-2,3,2)$).

$$\boxed{Ecuacións\ paramétricas\text{:}\ \begin{cases}x=-1-2\lambda+\mu\\ y=5+3\lambda-4\mu\\ z=2\lambda+\mu\end{cases}}$$

Para obter a ecuación xeral, podemos eliminar os parámetros λ e μ nas ecuacións paramétricas ou ben calcular a ecuación do plano a partir dun punto do plano (por exemplo o $A(-1,5,0)$ e un vector normal ao plano $\vec{n}$:

$$\vec{n} = (-2,3,2)\times(1,-4,1) = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -2 & 3 & 2\\ 1 & -4 & 1\end{vmatrix} = 11\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+5\vec{k}$$

Polo tanto, a *ecuación xeral* do plano é:

$$11(x+1)+4(y-5)+5z=0 \Longrightarrow \boxed{11x+4y+5z-9=0}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio3:

a)

- $f(x)$ é continua en $x < 1$, por ser polinómica.
- Se $a \neq 0$, $f(x)$ é continua en $x > 1$ por ser racional e non anularse o denominador.
- Estudo da continuidade en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = a - 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2/a \\ f(1) = a - 1 \end{array}\right\}$$

Para que sexa continua en $x = 1$, debe ser $a - 1 = 2/a \;\Rightarrow\; a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1$ ou $a = 2$

Polo tanto, $\boxed{f(x)\text{ é } continua\ se\ a = -1\ \ ou\ \ a = 2}$

Se unha función é derivable nun punto, necesariamente é continua nel. Polo tanto, para estudar a derivabilidade en $x = 1$, só teremos que facelo cando $a = -1$ ou $a = 2$

Caso: $a = -1$

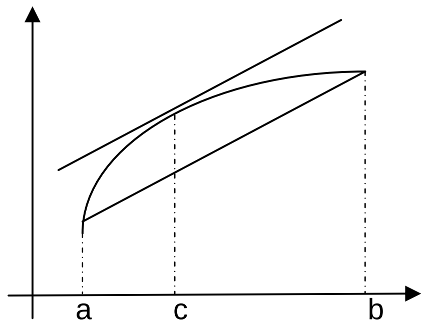
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & se\ x < 1 \\ 2/_{x^2} & se\ x > 1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = \ \ 2 \end{array} \quad\Rightarrow \text{ Non é derivable en } x = 1.$$

Caso: $a = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & se\ x < 1 \\ -1/_{x^2} & se\ x > 1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = -1 \end{array} \quad\Rightarrow \text{ Non é derivable en } x = 1$$

Polo tanto, $\boxed{f(x)\ non\text{ é } derivable\ en\ x = 1\ para\ ning\text{ú}n\ valor\ de\ a}$.

b) *Teorema do valor medio do cálculo diferencial*: Se $f(x)$ é continua en [a,b] e derivable en (a,b), entón existe algún punto c∈(a,b) tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$



Interpretación xeométrica: Nas hipótesis do teorema, existe algún punto intermedio no que a tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á corda que une os puntos (a,f(a)) e (b,f(b)).

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

É a integral dunha función racional. Como o grao do numerador é igual ao grao do denominador, en primeiro lugar facemos a división para obter unha fracción cuxo numerador sexa de grao inferior ao denominador:

$$\frac{5x^3 - 3x + 1}{x^3 - x} = 5 + \frac{2x+1}{x^3 - x}$$

Calculamos as raíces do denominador:

$$x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1) \ \Rightarrow \text{Raíces: } 0,\ 1,\ -1.$$

Son todas raíces reais sinxelas, facemos a descomposición:

$$\frac{2x + 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx}{x(x-1)(x+1)}$$

Como os denominadores son iguais, os numeradores deben ser iguais:

$$\begin{array}{rll} A + B + C = 0 & (coeficiente\ de\ x^2) & \\ B - C = 2 & (coeficiente\ de\ x) & \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = -1 \\ B = 3/2 \\ C = -1/2 \end{array}\right. \\ -A = 1 & (termo\ independente) & \end{array}$$

A integral queda:

$$\int_2^3 \frac{5x^3 - 3x + 1}{x^3 - x}dx = \int_2^3 \left[5 + \frac{2x + 1}{x^3 - x}\right]dx = \int_2^3 \left[5 - \frac{1}{x} + \frac{3/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}\right]dx$$

$$= \left[5x - ln|x| + \frac{3}{2}ln|x-1| - \frac{1}{2}ln|x+1|\right]_2^3$$

$$= 15 - ln3 + \frac{3}{2}ln2 - \frac{1}{2}ln4 - \left(10 - ln2 - \frac{1}{2}ln3\right)$$

$$\boxed{Solución = \ 5 - \ 1/2\ ln3 + \ 3/2\ ln2}$$